Anno Scolastico 2009/2010

PROGETTO LARSA

APPUNTI DI MATEMATICA

DOCENTI: R. BIVONA - G. PITASI

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

CALCOLO LETTERALE

Prima di affrontare lo studio del calcolo letterale ricordiamo:

- **definizione di potenza di un numero:** la potenza di un numero è il prodotto per se stesso tante volte quante ne indica l'esponente, cioè:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{\text{n volte}} \qquad \text{con } n \in N - \{0\}, a \in R$$

- $a^0 = 1$ con $a \neq 0$; $a^1 = a$; 0^0 non ha significato

- **proprietà delle potenze:**

1. il prodotto tra due o più potenze aventi la stessa base è uguale ad una potenza avente per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti,cioè:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2. il quoziente tra due potenze aventi la stessa base è uguale ad una potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti,cioè:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{con } a \neq 0$$

3. la potenza di una potenza è uguale ad una potenza avente per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti, cioè:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4. il prodotto tra due o più potenze aventi gli stessi esponenti è uguale ad una potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente, cioè:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

5. il quoziente tra due potenze aventi gli stessi esponenti è uguale ad una potenza avente per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente, cioè:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{con } b \neq 0.$$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 🖷: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 🖷: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

MONOMI

DEFINIZIONE

Un monomio è un insieme di numeri e lettere in cui non compaiono operazioni di addizione e sottrazione ma solamente di moltiplicazione e come potenze soltanto numeri naturali:

Sono monomi -3a, 7ab, $\frac{2}{5}a^3bc^4$,

mentre $\frac{8}{3}b^{-3}$ non e' un monomio.

GRADO DI UN MONOMIO

Il grado di un monomio è la somma degli esponenti che compaiono sulle lettere che fanno parte del monomio stesso.

Esempi:

- 2abc ha grado 3
- $2a^3b^2c$ ha grado 6

L'esponente con cui compare ogni lettera è detto grado rispetto alla lettera.

- Il monomio $2a^3b^2c$ ha grado 3 rispetto alla lettera a, grado 2 rispetto alla lettera b, grado 1 rispetto alla lettera c.

SOMMA E DIFFERENZA FRA MONOMI

DEFINIZIONE

Due monomi si dicono **simili** se hanno la stessa parte letterale.

Regola

Puoi **sommare** due monomi se sono simili e in tal caso farai la somma dei coefficienti numerici (i numeri davanti alle lettere) senza modificare la parte letterale.

Esempio di somma: $3a^2b+2ab+5a^2b=8a^2b+2ab$.

Per la differenza la regola è la stessa che per la somma, infatti basta sottrarre invece di sommare.

Esempio di sottrazione: $5a^3b^2-2a^3b^2=3a^3b^2$.

Quindi, quando si parlerà di somma si intenderà somma algebrica, cioè sia la somma che la differenza.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

PRODOTTO FRA MONOMI

Per moltiplicare due monomi è necessario seguire queste semplici **regole:**

- il segno del primo monomio va moltiplicato con il segno del secondo monomio applicando la regola dei segni della moltiplicazione fra i numeri interi (se il segno non c'e' e' sottointeso +)
- il primo coefficiente numerico va moltiplicato con il numero secondo le regole del prodotto dei numeri razionali (se il numero non c'e' e' sottointeso 1)
- le lettere vanno moltiplicate con le lettere secondo le proprietà delle potenze.

Esempio: $(-3a^2b)(+4ab^2)=-12a^3b^3$.

Se devi fare il prodotto fra più monomi prima moltiplica il primo per il secondo, poi quello che viene per il terzo e così via.

DIVISIONE O QUOZIENTE FRA MONOMI

Il quoziente fra due monomi è un monomio che ha come coefficiente il quoziente dei due coefficienti e come parte letterale tutte le lettere del dividendo , ciascuna avente la differenza degli esponenti con cui essa figura nel dividendo e nel divisore.
(Attenzione sempre alla regola dei segni)

Esempio: $(-6a^2b^3c):(+2ab^2)= -3abc$.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

ELEVAMENTO A POTENZA DI MONOMI

Ricorda che l'elevamento a potenza e' una moltiplicazione ripetuta tante volte quanto e' l'esponente (al solito devi moltiplicare tra loro i segni, i numeri e le lettere).

Ricorda che:

- $(\pm a)^n = +a^n$ con n numero pari
- $(+a)^n = +a^n$ con n numero dispari
- $(-a)^n = -a^n$ con n numero dispari.

M. C. D. FRA MONOMI

Si chiama massimo comune divisore di due o più monomi ogni monomio di grado massimo che divida contemporaneamente tutti i monomi dati.

Il Massimo Comune Divisore in Matematica viene usato quasi esclusivamente per eseguire il Raccoglimento a Fattor Comune Totale.

m.c.m. FRA MONOMI

Si chiama minimo comune multiplo di due o più monomi ogni monomio di grado minimo che sia divisibile contemporaneamente per tutti i monomi dati. è il più piccolo fra i multipli comuni.

Esempio: Trovare il M.C.D. ed il m.c.m. fra $6a^2b^3c$ e $4ab^2$:

M.C.D. = $2ab$; **m.c.m**. = $12a^2 b^3c$.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

POLINOMI

Si dice ***polinomio*** un'espressione algebrica che rappresenta la somma di più monomi.

$$4x^3y + 2x - \frac{1}{2}z; \quad 4ab - 3b^2$$

OPERAZIONI CON I POLINOMI

Si possono definire le quattro operazioni sui polinomi, prestando la dovuta attenzione per quanto riguarda la divisione.

SOMMA

La somma di polinomi è un polinomio che si ottiene semplicemente addizionando i singoli monomi di ogni polinomio della somma, riducendo tutti i monomi simili.

Esempio:

$$\begin{aligned}
&(4a^2 - b + 3ac) + (2a + 3b - 4c) - (2a^2 - 2ab + 3ac) = \\
&4a^2 - b + 3ac + 2a + 3b - 4c - 2a^2 + 2ab - 3ac = \\
&(4-2)a^2 + (3-3)ac + (3-1)b + 2a - 4c + 2ab = \\
&2a^2 + 2b + 2a - 4c + 2ab
\end{aligned}$$

PRODOTTO DI UN MONOMIO PER UN POLINOMIO

Il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ciascun termine del polinomio per il monomio.

Esempio:

$$(2ab - 3ac^2 + 3abc) \cdot (-\frac{1}{2}ab^2) = -a^2b^3 + \frac{3}{2}a^2b^2c^2 - \frac{3}{2}a^2b^3c$$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 Fax: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 Fax: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Si dice che un polinomio è divisibile per un monomio non nullo, se esiste un altro polinomio il cui prodotto per il monomio è uguale al polinomio dato.

La condizione di divisibilità è che ciascun termine del polinomio sia divisibile per il monomio.

Esempio:

$$(21x^5 - 12x^3 + 8x) : (3x) = 7x^4 - 4x^2 + \frac{8}{3}$$

PRODOTTO DI DUE POLINOMI

Il prodotto di due polinomi è il polinomio ottenuto moltiplicando ciascun termine di un polinomio per ogni termine dell'altro.

In pratica si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Esempio:

$$(4a - 2b)(3ab + b) = 4a \cdot 3ab + 4a \cdot b - 2b \cdot 3ab - 2b \cdot b = 12a^2b + 4ab - 6ab^2 - 2b^2$$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

PRODOTTI NOTEVOLI

1. SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

La somma di due monomi per la loro differenza e' uguale al quadrato del primo monomio meno il quadrato del secondo monomio.

2. QUADRATO DEL BINOMIO

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Il quadrato di un binomio e' uguale al quadrato del primo monomio piu' il doppio del prodotto del primo per il secondo piu' il quadrato del secondo.

3. QUADRATO DEL TRINOMIO

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 +2ab+2ac+2bc$$

Il quadrato di un trinomio e' uguale al quadrato del primo monomio più il quadrato del secondo monomio più il quadrato del terzo più il doppio del prodotto del primo monomio per il secondo, più il doppio del prodotto del primo monomio per il terzo, più il doppio del prodotto del secondo monomio per il terzo.

4. CUBO DEL BINOMIO

$$(a+b)^3 = a^3 +3a^2 b+3ab^2 +b^3$$

Il cubo di un binomio e' uguale al cubo del primo monomio più il triplo del prodotto del quadrato del primo per il secondo, più il triplo del prodotto del primo per il quadrato del secondo,più il cubo del secondo.

Esercizi svolti:

1) $(2a+3b)(2a-3b) =$

moltiplichiamo

$2a \cdot 2a = 4a^2$, $2a \cdot (-3b) = -6ab$, $3b \cdot 2a = 6ab$, $3b \cdot 3b = 9b^2$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

poiché 6ab-6ab si annullano otterremo $\mathbf{4a^2 - 9b^2}$, quindi basta fare la differenza dei quadrati dei due monomi.

2) $(2x+4y)^2 =$

moltiplichiamo $(2x+4y)(2x+4y)$

cioè : $2x\cdot 2x = 4x^2$, $2x\cdot(4y) = 8xy$, , $4x\cdot(2x) = 8xy$, $4y\cdot 4y = 16y^2$
poiché 8xy+8xy sono uguali e si sommano otterremo $\mathbf{4x^2+16xy+16y^2}$, quindi basta applicare la regola data, cioè:

$$\mathbf{(2x+4y)^2} = (2x)^2 + 2(2x)(4y) + (4y)^2 = \mathbf{4x^2+16xy+16y^2}.$$

3) $(3a + 2b)^3 =$

moltiplicando (3a +2b) (3a +2b) (3a +2b) si dovranno eseguire parecchi prodotti, sommare i monomi simili ed infine si avrà il polinomio: $27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$, quindi è più conveniente applicare subito la regola data, cioè:

$$\mathbf{(3a + 2b)^3} = (3a)^3 + 3\cdot(3a)^2 \cdot(2b) + 3\cdot(3a)\cdot(2b)^2 + (2b)^3 = \mathbf{27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3}.$$

4) $(2x-3y+6z)^2=$

moltiplichiamo (2x-3y+6z) (2x-3y+6z), si dovranno eseguire parecchi prodotti, sommare i monomi simili ed infine si avrà il polinomio: $4x^2+9y^2+36z^2-12xy+24xz-36yz$, quindi è più conveniente applicare subito la regola data, cioè:

$$\mathbf{(2x-3y+6z)^2}= (2x)^2+(-3y)^2+(6z)^2+2(2x)(-3y)+2(2x)(6z)+2(-3y)(6x)= \mathbf{4x^2+9y^2+36z^2-12xy+24xz-36yz}.$$

DIVISIONE DI DUE POLINOMI

Consideriamo i polinomi in una sola variabile, ordinati secondo le potenze decrescenti della stessa.
Il polinomio A(x) si dice divisibile per il polinomio B(x), se esiste un polinomio Q(x) tale che:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x)$$

B(x) si dice *divisore* e Q(x) si dice *quoziente*.

Esempio:

Siano

$$A(x) = x^3 - 3x + 2 \qquad B(x) = x^2 - 2x + 1$$

considerando che

$$(x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 = x^3 - 3x + 2$$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

si può considerare Q(x) = x+2 il quoziente tra A(x) e B(x).

Se i due polinomi non sono perfettamente divisibili, considerando il resto della divisione, si può sempre affermare che:
Se A(x) e B(x) sono due polinomi, ordinati secondo le potenze decrescenti della x e se B(x) non è il polinomio nullo, esistono (sempre) due polinomi unici, Q(x) e R(x), che soddisfano le seguenti condizioni:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Dove il grado di R(x) è minore del grado di B(x). R(x) si dice resto.

La regola dice:

1. Ordina i due polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile, avendo cura di indicare con uno 0 i termini mancanti.
2. Dividi il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, ottenendo il primo termine del quoziente.
3. Moltiplica il primo termine del quoziente per il divisore e sottrai il risultato dal dividendo, ottenendo il primo resto parziale.
4. Ripeti dal punto 2. utilizzando il resto parziale invece del dividendo.

Il ciclo finisce quando il resto parziale ha grado inferiore al divisore. Questo è il resto della divisione.

<u>Esempio</u>: dato il dividendo $A(x) = 2x - 5x^2 + 8x^3 - 1$ di grado 3 ed il divisore $B(x) = x^2 + 3 - 2x$ di grado 2, eseguiamo la seguente divisione $(2x - 5x^2 + 8x^3 - 1) : (x^2 + 3 - 2x)$ seguendo tutti i punti della regola citata prima:

1.

$$\begin{array}{r|l} 8x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \hline & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r|l} 8x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \hline & 8x \end{array}$$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

3.

$$\begin{array}{r|l}
8x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-8x^3 + 16x^2 - 24x & 8x \\ \cline{1-1}
11x^2 - 22x - 1 &
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r|l}
8x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-8x^3 + 16x^2 - 24x & 8x + 11 \\ \cline{1-1}
11x^2 - 22x - 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
8x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-8x^3 + 16x^2 - 24x & 8x + 11 \\ \cline{1-1}
11x^2 - 22x - 1 & \\
-11x^2 + 22x - 33 & \\ \cline{1-1}
-34 &
\end{array}$$

Il quoziente $Q(x) = 8x + 11$ è di grado 1 (perchè 3-2) e il resto $R = -34$ è di grado 0 (< 2).

Possiamo facilmente verificare che:

$$B(x) \cdot Q(x) + R(x) = A(x)$$

Infatti:

$$\overbrace{(x^2 - 2x + 3)}^{B(x)} \cdot \overbrace{(8x + 11)}^{Q(x)} + (-34) =$$

$$= 8x^3 - 16x^2 + 24x + 11x^2 - 22x + 33 - 34 = \overbrace{8x^3 - 5x^2 + 2x - 1}^{A(x)}$$

Abbiamo verificato che la divisione è stata eseguita in modo corretto.

Se $R(x) = 0$, si dice che $Q(x)$ è il quoziente esatto e $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Se il dividendo $A(x)$ non è un polinomio completo, nell'eseguire la divisione scriviamo il polinomio $A(x)$ lasciando uno spazio vuoto o scrivendo lo zero in corrispondenza di ogni termine mancante.

Teorema di Ruffini

Il polinomio $A(x)$ è divisibile esattamente per il binomio $(x+a)$ se, e solo se, $A(-a)=0$, cioè il polinomio $A(x)$ si annulla per $x=-a$. Tale teorema è utile quando si devono scomporre i polinomi.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 📠: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 📠: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI

Scomporre un polinomio in fattori significa scriverlo sotto forma di un prodotto di due o più polinomi di grado minore.

Alcuni semplici metodi sono:

1. **RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE:**

- **Totale**: $ab + ac - ad = a(b + c - d)$
- **Parziale**: $ab + ac - db - dc = a(b + c) - d(b + c) = (a - d)(b + c)$

2. **USO DELLE REGOLE SUI PRODOTTI NOTEVOLI:**

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
- $a^2+b^2+c^2 +2ab+2ac+2bc = (a+b+c)^2$
- $a^3 +3a^2 b+3ab^2 +b^3 = (a+b)^3$

3. **USO DELLE REGOLE:**

- $a^3 – b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

4. **SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO:**

- $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 📠: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 📠: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

M.C.D. FRA POLINOMI

Come per i monomi anche per i polinomi per calcolare il Massimo Comun Divisore devi trovare tutti i fattori comuni, quindi prima dovrai scomporre i polinomi poi cercare cosa hanno di uguale fra loro (ricorda che se non hanno niente di uguale il Massimo Comun Divisore vale 1).

DEFINIZIONE

Per calcolare il M.C.D. fra polinomi si scompongono i polinomi in fattori e poi si prendono i fattori comuni con l'esponente più basso.

Esempio: trovare il M.C.D. fra i seguenti polinomi $3x^2 - 12$; $3x^3 + 24$; $6x + 12$;

$3x^2 - 12 = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$

$3x^3 + 24 = 3 \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$

$6x + 12 = 2 \cdot 3 \cdot (x + 2)$

Quindi il M.C.D. = $3 \cdot (x + 2)$.

m.c.m. FRA POLINOMI

Per calcolare il minimo comune multiplo devi prendere tutti i fattori comuni e non comuni con l'esponente più alto, quindi prima dovrai scomporre i polinomi.

DEFINIZIONE

Per calcolare il m.c.m. fra polinomi si scompongono i polinomi in fattori e poi si prendono i fattori comuni e non comuni con l'esponente più alto.

Esempio:trovare il M.C.D. fra i seguenti polinomi $x^2 - 9$; $2x^2 + 12x + 18$; $3x^3 - 81$;

$x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$

$2x^2 + 12x + 18 = 2 \cdot (x + 3)^2$

$3x^3 - 81 = 3 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$

Quindi m.c.m. = $2 \cdot 3 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)^2 \cdot (x^2 + 3x + 9)$.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Leni 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

FRAZIONI ALGEBRICHE

DEFINIZIONE

Si chiama **frazione algebrica**, una frazione del tipo $\frac{A}{B}$, con $B \neq 0$, dove A e B sono dei polinomi.

Esempi di frazioni algebriche:

$$\frac{2a - b}{a^2 - 3ab + 2b^2}, \qquad \frac{5xy}{x^2 - x + 4^2}$$

Quando si opera con frazioni algebriche è necessario escludere i valori delle lettere che rendono nullo il denominatore, cioè occorre determinare le condizioni di esistenza (o di realtà) delle frazioni algebriche date.

SOMMA E DIFFERENZA DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Si deve seguire lo stesso procedimento che si usa per la somma di due frazioni numeriche.

Quando hai una somma di frazioni algebriche devi fare la stessa cosa:

- scomporre i denominatori
- fare il minimo comune multiplo
- dividere il minimo comune multiplo per i denominatori e moltiplicare il risultato per i numeratori
- eseguire le moltiplicazioni ai numeratori
- sommare i termini simili
- scomporre, se possibile il numeratore per semplificarlo con il denominatore
- scrivere la frazione finale.

Esempio: sommare le frazioni:

$$\frac{x+3}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2-2x} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-4}{x(x-2)} = \frac{x(x+3)+(x+2)(x-4)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+3x+x^2-4x+2x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2+x-8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 🖷: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 🖷: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

Per la differenza è come per la somma ma attenzione: qui è facile commettere un errore, quando abbiamo il meno davanti a una frazione, occorre cambiare di segno tutti i termini al numeratore.

PRODOTTO DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Quando hai un prodotto di frazioni algebriche, devi fare la stessa cosa del prodotto fra due frazioni numeriche:

- scomporre i numeratori ed i denominatori
- eliminare i termini uguali che si trovino sia al numeratore che al denominatore (attenzione che anche se un solo segno e' diverso i termini non sono più uguali)
- moltiplicare numeratore con numeratore e denominatore con denominatore.

Esempio: moltiplicare le frazioni:

$$\frac{x^2-4}{x^2-9}\cdot\frac{3x-9}{x^2-2x}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{3(x-3)}{x(x-2)}=\frac{x+2}{(x+3)}\cdot\frac{3}{x}=\frac{3x+6}{x^2+3x}.$$

QUOZIENTE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Quando hai un quoziente di frazioni algebriche, devi fare la stessa cosa del prodotto fra due frazioni numeriche:

- riscrivere la prima frazione moltiplicata per l'inverso della seconda e poi procedere come per il prodotto:
- scomporre i numeratori ed i denominatori
- eliminare i termini uguali che si trovino sia al numeratore che al denominatore
- moltiplicare numeratore con numeratore e denominatore con denominatore.

POTENZA DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Quando ho una potenza di frazioni algebriche devi elevare a potenza sia il numeratore che il denominatore, come per le frazioni numeriche.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

IDENTITA'

DEFINIZIONE: Un'identità' e' una uguaglianza in cui compaiono delle lettere e che per qualunque valore si mette al loro posto l'uguaglianza deve restare sempre valida.

Esempio: $a + a = 2a$ e' un'identità, infatti, se sostituisci al posto di a qualunque valore, il primo termine resterà sempre uguale al secondo; se sostituisci 3 avrai $3 + 3 = 2 \cdot 3$, cioè $3 + 3 = 6$.

EQUAZIONI

DEFINIZIONE: Si chiama equazione di primo grado un'uguaglianza **ax = b** che può diventare vera sostituendo alla lettera x (incognita) un valore particolare detto soluzione.

Esempio: $3x - 6 = 0$

se al posto di x metti il valore 2 l'uguaglianza diventa vera $3 \cdot 2 - 6 = 0$, $6 - 6 = 0$, cioè $0 = 0$; se metti altri numeri non e' vera.

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione una stessa quantità l'equazione resta equivalente a quella data.

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Moltiplicando o dividendo ad ambo i membri di un'equazione una stessa quantità, diversa da zero, l'equazione resta equivalente a quella data.

REGOLA DEL TRASPORTO

Trasportando un termine da una parte all'altra dell'uguale, devi cambiarne il segno.

Esempio: risolvi l'equazione $5x - 2 + 7(x + 1) = 4x - 5$

Risoluzione: $5x - 2 + 7x + 7 = 4x - 5 \rightarrow 5x + 7x - 4x = 2 - 7 - 5 \rightarrow 8x = -10$

Applica il secondo principio di equivalenza ed ottieni $\frac{8}{8}x = -\frac{10}{8}$, semplifica ed avrai la soluzione dell'equazione: $x = -\frac{5}{4}$.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 🖷: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 🖷: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

E' possibile vedere se hai risolto giustamente un'equazione: infatti, per definizione un'equazione è un'uguaglianza verificata se al posto di x metti la soluzione quindi puoi fare la verifica sostituendo nell'equazione di partenza il valore $-\frac{5}{4}$ al posto di x.

EQUAZIONE DETERMINATA, IMPOSSIBILE ED INDETERMINATA

Data l'equazione **ax = b**, distinguiamo i tre casi seguenti:

1. **se $a \neq 0$ l'equazione è determinata**
2. **se $a \neq 0$ e $b = 0$ l'equazione è impossibile**
3. **se $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione è indeterminata (in tal caso è un'identità).**

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO FRATTE

DEFINIZIONE : Un'equazione si dice fratta quando la x compare sotto il segno di frazione.

Al solito, tenendo conto del secondo principio quando farai il m. c. m. dovrai dire che l'equazione non e' valida per il valore della x che annulla il minimo comune multiplo.
Questa si chiama anche Condizione di Esistenza (C.E.)
Dopo aver risolto l'equazione dovrai controllare il valore della x:

- se il valore della x non e' quello che annulla il minimo comune multiplo la soluzione e' accettabile
- se il valore trovato e' uguale a quello che annulla il minimo comune multiplo allora dovrai dire che la soluzione non e' accettabile.

Facciamo un esempio per tipo:

1) $\frac{1}{2} = \frac{1}{x-2}$, $\quad$ $\text{m.c.m.} = 2(x-2) \neq 0$, cioè la condizione di esistenza (o realtà) è $x \neq 2$,

$$\frac{(x-2)}{2(x-2)} = \frac{2}{2(x-2)}$$

per il 2° principio elimini i denominatori (avendo supposto il m.c.m. diverso da zero)

$x - 2 = 2$ da cui $x = 2 + 2$ ed infine la soluzione $x = 4$ risulta accettabile.

2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{x-2}$, $\quad$ $\text{m.c.m.} = 2(x-2) \neq 0$, cioè la condizione di esistenza (o realtà) è $x \neq 2$,

$$\frac{x-2-2}{2(x-2)} = \frac{-2}{2(x-2)}$$

per il 2° principio elimini i denominatori (avendo supposto il m.c.m. diverso da zero)

$x - 2 - 2 = -2$ da cui $x = 2 + 2 - 2$ ed infine la soluzione $x = -2$ risulta non accettabile perchè

contraria alla condizione di esistenza.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

RADICALI

DEFINIZIONE: si definisce radice ennesima di un numero a quel numero b che elevato a potenza n si ottiene a, cioè:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Rightarrow \quad b^n = a$$

e si legge : la radice ennesima di a e' il numero b che elevato alla n diventa uguale ad a.

Nomenclatura: se considero $\sqrt[n]{a}$

- $\sqrt[n]{a}$ è il radicale
- n è l'indice di radice
- a è il radicando.

Se l'indice di radice è 2, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ scrivi perché le radici quadrate saranno le più numerose, quindi sarà un bel risparmio di tempo.

RADICALI ARITMETICI

Quando non ci interessa sapere che segno otteniamo estraendo la radice parliamo di radicali aritmetici, cioè di radicali senza segno, ad esempio $\sqrt{25} = 5$ è un radicale aritmetico.

RADICALI ALGEBRICI

I radicali algebrici sono l'operazione inversa dell'elevamento a potenza: infatti, se ho $\sqrt{25}$ significa che devi trovare quel numero che moltiplicato per sé stesso ti da' 25 quindi avrai:

5 perché $5 \cdot 5 = 25$, ma avrai anche -5 perché $(-5) \cdot (-5) = 25$,

quindi per considerare tutte le possibilità scriverai $\sqrt{25} = \pm 5$

Per indicare un radicale algebrico userai il segno $\pm$, cioè scriverai $\sqrt{b} = \pm a$.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 📠: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 📠: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

OPERAZIONI CON I RADICALI

EQUIVALENZA FRA RADICALI

Due radicali si diranno equivalenti se hanno lo stesso valore.

Regola: due radicali si dicono equivalenti quando puoi trasformarli l'uno nell'altro moltiplicando o dividendo sia l'indice di radice che l'esponente del radicando per uno stesso numero

$$\sqrt[ns]{a^{ts}} = \sqrt[n]{a^{t}}$$

SOMMA E DIFFERENZA FRA RADICALI

Per somma intendiamo la somma algebrica cioè sia la somma sia la differenza.

Per capire come eseguire la somma fra radicali, ripensiamo a quella fra monomi:

$$5a + 4a + 7b = 9a + 7b$$

se al posto di a metti $\sqrt{2}$ e al posto di b metti $\sqrt{3}$ ottieni:

$$5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 7\sqrt{3} = 9\sqrt{2} + 7\sqrt{3}\,.$$

Regola: per eseguire la somma fra termini con radicali devi cercare i termini simili (con radicali uguali) e poi sommarne i coefficienti numerici (i termini fuori del radicale).

Si dicono simili due termini se hanno lo stesso radicale.

PRODOTTO FRA RADICALI

Dobbiamo distinguere due casi:

- **PRODOTTO FRA RADICALI CON LO STESSO INDICE**

- **PRODOTTO FRA RADICALI CON INDICE DIVERSO**

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

PRODOTTO FRA RADICALI CON LO STESSO INDICE

Anche per il prodotto ci rifacciamo al calcolo letterale: infatti, per eseguire un prodotto fra monomi devi moltiplicare numeri con numeri e lettere con lettere.

Regola: per moltiplicare fra loro due termini con radicali con lo stesso indice si devono moltiplicare fra loro i coefficienti e tra loro i radicandi mentre la radice resta invariata.

$$2\sqrt[4]{7} \cdot 5\sqrt[4]{4} = 10\sqrt[4]{28}\,.$$

PRODOTTO FRA RADICALI CON INDICE DIVERSO

Regola: per moltiplicare fra loro due radicali con indice diverso prima li trasformi in radicali con lo stesso indice poi procedi come prima.

Per trasformare i radicali con lo stesso indice devi usare la regola di equivalenza:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b^2}$$

il minimo comune multiplo fra 3 e 4 e' 12 quindi devi trasformare i due radicali in modo che abbiano indice 12 moltiplicando sia l'indice di radice che l'esponente del radicando per uno stesso numero

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^4} \text{ moltiplicando per 4}$$

$$\sqrt[4]{b^2} = \sqrt[12]{b^6} \text{ moltiplicando per 3}$$

Quindi: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b^2} = \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{b^6} = \sqrt[12]{a^4 b^6}$.

QUOZIENTE FRA RADICALI

Come per il prodotto distinguiamo due casi:

- **QUOZIENTE RADICALI CON LO STESSO INDICE**
- **QUOZIENTE RADICALI CON INDICE DIVERSO**

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

QUOZIENTE RADICALI CON LO STESSO INDICE

Regola: per dividere fra loro due radicali con lo stesso indice si dividono tra loro i radicandi.
In questo caso basta fare il radicale del quoziente dei termini dentro radice:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}\,.$$

QUOZIENTE RADICALI CON INDICE DIVERSO

Regola: per dividere fra loro due radicali se non hanno lo stesso indice prima, si riducono allo stesso indice, poi si procede come prima.
Prima devi far diventare i due radicali con lo stesso indice, poi procedi come prima.

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[12]{a^4}}{\sqrt[12]{b^3}} = \sqrt[12]{\frac{a^4}{b^3}}\quad.$$

ELEVAMENTO A POTENZA DI RADICALI

Per elevare a potenza una radice basta elevare a potenza il radicando, cioè:

$$(\sqrt[5]{3})^4 = \sqrt[5]{3^4}\,.$$

PORTAR FUORI RADICE

E' un'operazione tipica dei radicali: si può fare quando l'indice del radicando e' superiore all'indice della radice

$$\sqrt[5]{a^{13}} = \sqrt[5]{a^{10}\cdot a^3} = a^2\cdot\sqrt[5]{a^3}\,.$$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa eliminare la radice al denominatore.

Consideriamo soltanto la razionalizzazione del denominatore del tipo: $\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{b}}}$.

Per eseguire la suddetta razionalizzazione, si deve moltiplicare numeratore e denominatore per il denominatore $\sqrt{b}$, cioè:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Esempio:

Razionalizza il denominatore della frazione $\frac{6}{\sqrt{5}}$:

$$\frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 📠: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 📠: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

In matematica, un'**equazione di secondo grado** è un'equazione algebrica ad una sola incognita x che compare con grado massimo pari a 2, e la cui formula è riconducibile alla forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0} \qquad \mathbf{con} \quad \mathbf{a \neq 0}.$$

Le soluzioni delle equazioni di secondo grado sono sempre 2, però si distingue e si dice che:

- nel campo reale ammette due soluzioni, eventualmente coincidenti, oppure nessuna soluzione mentre
- nel campo complesso ammette sempre due soluzioni eventualmente coincidenti.

Sono poi particolarmente semplici da risolvere le cosiddette equazioni incomplete dove alcuni coefficienti sono pari a zero.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INCOMPLETE

Equazione spuria

Si dice **spuria** un'equazione di secondo grado che manca del termine noto, ossia avente la forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$$

Un'equazione di questo tipo si risolve facilmente tramite scomposizione:

$$x(ax + b) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto quest'equazione è equivalente alle due:

$x = 0$ e $ax + b = 0$

E in definitiva le sue soluzioni sono: $\mathbf{x = 0}$ **e** $\mathbf{x = \frac{b}{a}}$.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

Esempio: risolvi l'equazione $5x^2 + 8x = 0$:

$x\,(5x + 8) = 0$ per la legge di annullamento del prodotto si ha :

- $x = 0$
- $5x + 8 = 0 \;\rightarrow\; 5x = -8 \;\rightarrow\; x = -\dfrac{8}{5}$.

Equazione pura

Si dice **equazione pura** un'equazione di secondo grado che manca del termine di primo grado, cioè che è della forma:

$$\mathbf{ax^2 + c = 0}$$

Portando *c* al secondo membro e dividendo per *a* si ottiene:

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Se a e c sono concordi, l'equazione non ammette soluzioni reali (ma due soluzioni immaginarie).

Se a e c sono discordi, l'equazione ammette due soluzioni opposte date dalla formula: $\mathbf{x} = \pm\sqrt{-\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}}$.

Esempi:

1. Risolvi l'equazione $4x^2 - 64 = 0$:

   $4x^2 = 64 \;\rightarrow\; \dfrac{4}{4}x^2 = \dfrac{64}{4} \;\rightarrow\; x^2 = 16 \;\rightarrow\; \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16} \;\rightarrow\; x = \pm 4.$

2. Risolvi l'equazione $x^2 + 25 = 0$:

   $x^2 = -25 \;\rightarrow\; \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-25} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{-25}$, le soluzioni non sono reali.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 🖷: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Leni 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 🖷: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

Equazione monomia

Si dice **equazione monomia** un'equazione di secondo grado nella quale $b = 0$ e $c = 0$, cioè

$$\mathbf{ax^2 = 0}$$

In questo caso l'equazione ammette come soluzione doppia: $\mathbf{x = 0}$.

Esempio: risolvi l'equazione $15x^2 = 0$:

$15x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0.$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO COMPLETE

Un'equazione di secondo grado è detta **equazione completa** quando tutti i suoi coefficienti sono diversi da 0.

La **formula risolutiva delle equazioni di secondo grado** è la seguente:

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

E' anzitutto necessario calcolare il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si distinguono tre casi:

- Se $\mathbf{\Delta > 0}$, vi sono due soluzioni distinte: $\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$

- Se $\mathbf{\Delta = 0}$, la formula risolutiva diventa: $\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}}$

Pertanto la soluzione è unica o, come spesso si dice, le due radici sono coincidenti (o ancora vi è una radice doppia): $\mathbf{x_1 = x_2}$.

- Se $\mathbf{\Delta < 0}$, infine, l'equazione non ha soluzioni reali.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

In particolare le soluzioni sono sempre due, ma appartengono ai numeri complessi.

Esempi:

1. Risolvi l'equazione $3x^2 - 5x - 2 = 0$:

   calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 > 0$, le soluzioni saranno reali e distinte, applichiamo la formula risolutiva $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{2}$, da cui le soluzioni $x_1 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$, cioè $x_1 = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = 2$.

2. Risolvi l'equazione $9x^2 - 30x + 25 = 0$:

   calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 900 - 900 = 0$, le soluzioni saranno reali e coincidenti, applichiamo la formula risolutiva $x_{1,2} = \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$, da cui le soluzioni $x_1 = x_2 = \frac{5}{3}$.

3. Risolvi l'equazione $6x^2 - 3x + 8 = 0$:

   calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 192 = -183 < 0$, le soluzioni non sono reali.

EQUAZIONI FRATTE DI SECONDO GRADO

Si procede come per le equazioni fratte di primo grado.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 📠: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 📠: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

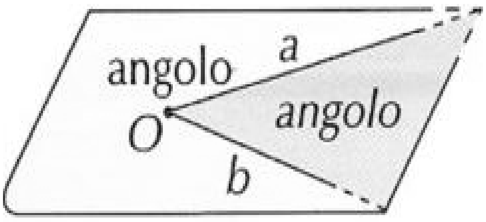
TRIGONOMETRIA

La **trigonometria** è la parte della matematica che studia i triangoli a partire dai loro angoli. Il compito principale della trigonometria consiste nel calcolare le misure che caratterizzano gli elementi di un triangolo (lati, angoli, mediane, etc.) partendo da altre misure già note (almeno tre, di cui almeno una lunghezza), per mezzo di speciali funzioni.

Strumento indispensabile della trigonometria sono le funzioni trigonometriche, le più importanti delle quali sono il seno e il coseno. Sono queste funzioni che associano lunghezze ad angoli, e viceversa.

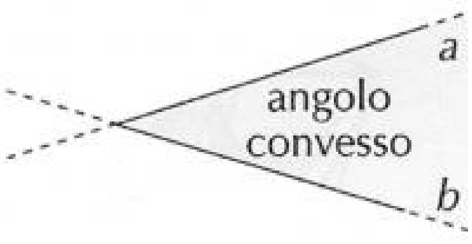
IL CONCETTO DI ANGOLO

Tracciamo, su un foglio del nostro quaderno, due linee, che supponiamo essere **due semirette a** e **b**, aventi la stessa origine. Le due semirette dividono il piano, intercettato dal foglio, in due parti, ciascuna delle quali si estende illimitatamente e prende il nome di **angolo**. Le due semirette si dicono **lati dell'angolo** (lato inizio e lato termine) e la loro origine comune si dice **vertice** dell'angolo.

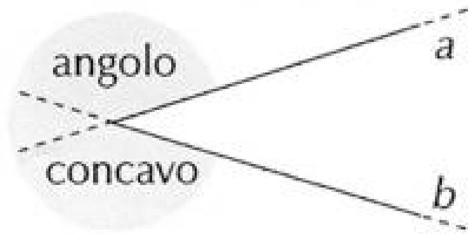


DEFINIZIONE

Si chiama angolo ciascuna delle due parti in cui il piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune.



Chiamiamo **angolo convesso** quello che non contiene i prolungamenti dei suoi lati.



Chiamiamo **angolo concavo** quello che li contiene.

L'angolo si misura in gradi o in radianti.

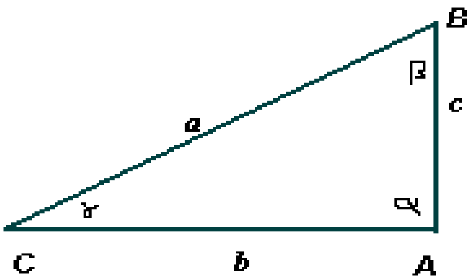
Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Leni 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

DEFINIZIONE DI SENO E COSENO IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Consideriamo un triangolo rettangolo ABC con l'angolo retto α in A, sia β l'angolo in B e γ l'angolo in C. Indichiamo con a il lato opposto all'angolo di vertice A, con b il lato opposto al vertice B e con c quello opposto al vertice B.



$$\text{sen}\,\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \qquad \text{sen}\,\gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{CA}{BC} = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{CB}{BC} = \frac{b}{a}$$

DEFINIZIONI

Il seno di un angolo, in un triangolo rettangolo è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo considerato e l'ipotenusa.

Il coseno di un angolo, in un triangolo rettangolo è il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo considerato e l'ipotenusa.

La trigonometria piana definisce e studia anche altre funzioni trigonometriche o circolari di un angolo o dell'arco che esso individua su una circonferenza goniometrica, quali: la tangente, la cotangente, la secante e la cosecante. Essa stabilisce le relazioni cui queste funzioni soddisfano e fra le quali devono essere ricordate:

$$\textit{Prima relazione fondamentale: } senx^2 + cosx^2 = 1$$

$$\textit{Seconda relazione fondamentale: } tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Dalla seconda relazione possiamo dire che: $\text{tang}\,\gamma = \frac{BA}{CA} = \frac{c}{b}$ e $\text{tang}\,\beta = \frac{CA}{BA} = \frac{b}{c}$.

Inoltre, la funzione $\text{cotang}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ è l'nverso della funzione $\text{tang}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}$.

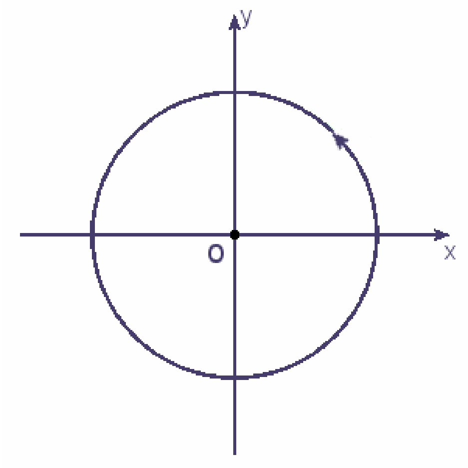
Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Leni 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

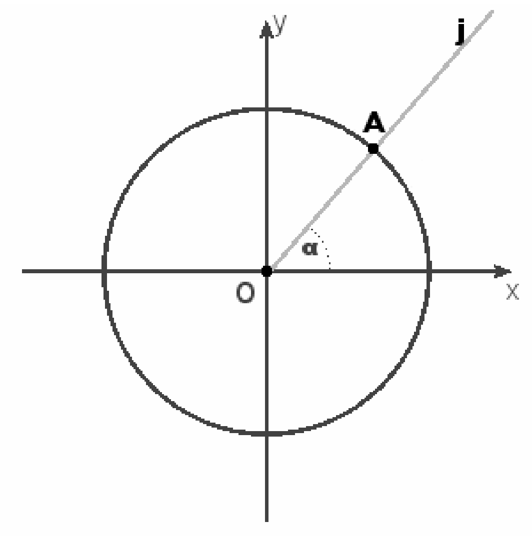
10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

DEFINIZIONE

La circonferenza goniometrica orientata ha il centro coincidente con l'origine del piano cartesiano ed il raggio unitario.

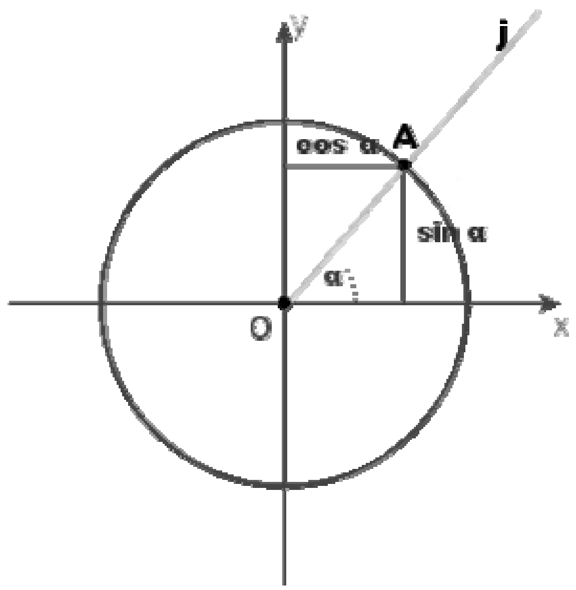


Partendo dall'origine del nostro piano di riferimento, tracciamo una semiretta detta **j**.



Chiamiamo A il punto in cui questa semiretta incrocia la circonferenza goniometrica.

Chiamiamo α l'angolo descritto dalla semiretta rispetto l'asse delle ascisse.



Si definisce seno dell'angolo α la proiezione di A sull'asse delle ordinate.

Si definisce coseno dell'angolo α la proiezione di A sull'asse delle ascisse.

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

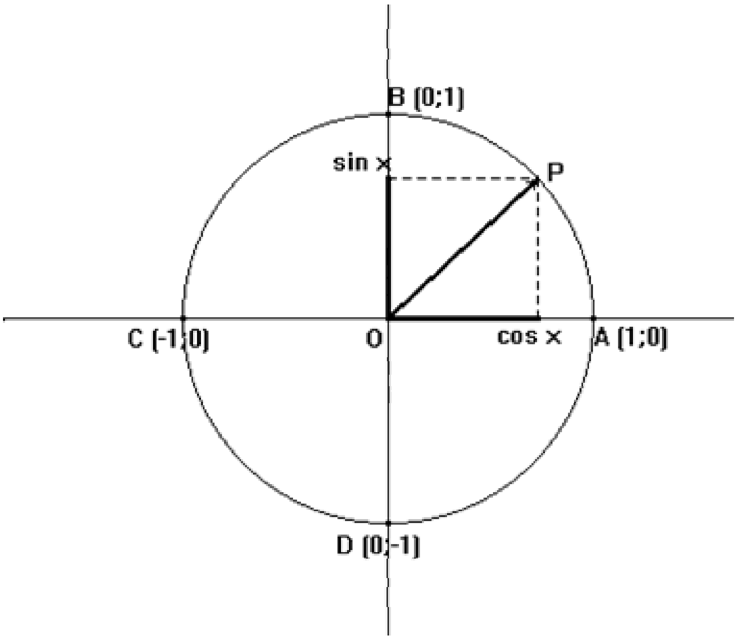
10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

Considerate x ed y le coordinate del punto A nel piano cartesiano, possiamo dire che:

- **In una circonferenza goniometrica, il seno di α è l'ordinata (cioè y_A) del punto d'incontro A tra la circonferenza ed il lato termine OA dell'angolo α.**
- **In una circonferenza goniometrica, il coseno di α è l'ascissa (cioè x_A) del punto d'incontro A tra la circonferenza ed il lato termine OA dell'angolo α.**

Consideriamo la circonferenza goniometrica, indichiamo con A,B,C e D i suoi punti di incontro con gli assi cartesiani rispettivamente negli angoli 0°(coincidente con 360°), 90°, 180° e 270°.

Conosciamo, quindi, i valori delle funzioni seno e coseno in A,B,C e D.



I quattro quadranti della circonferenza goniometrica sono caratterizzati nel seguente modo:

- I quadrante: cos x > 0 ; sen x > 0
- II quadrante: cos x < 0 ; sen x > 0
- III quadrante: cos x < 0 ; sen x < 0
- IV quadrante: cos x > 0 ; sen x < 0.

Si dimostra che:

- $\mathbf{sen\ 30^0 = \frac{1}{2}\ ,\ \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\mathbf{sen\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$
- $\mathbf{sen\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \cos 60^0 = \frac{1}{2}}$

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Leni 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

A questo punto, possiamo costruire la **tabella** contenente i valori delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente di particolari angoli:

X°	X radianti	SEN X°	COS X°	TG X°	COTG X°
0°	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180°	π	0	-1	0	∞
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	∞	0
360°	2π	0	1	0	∞

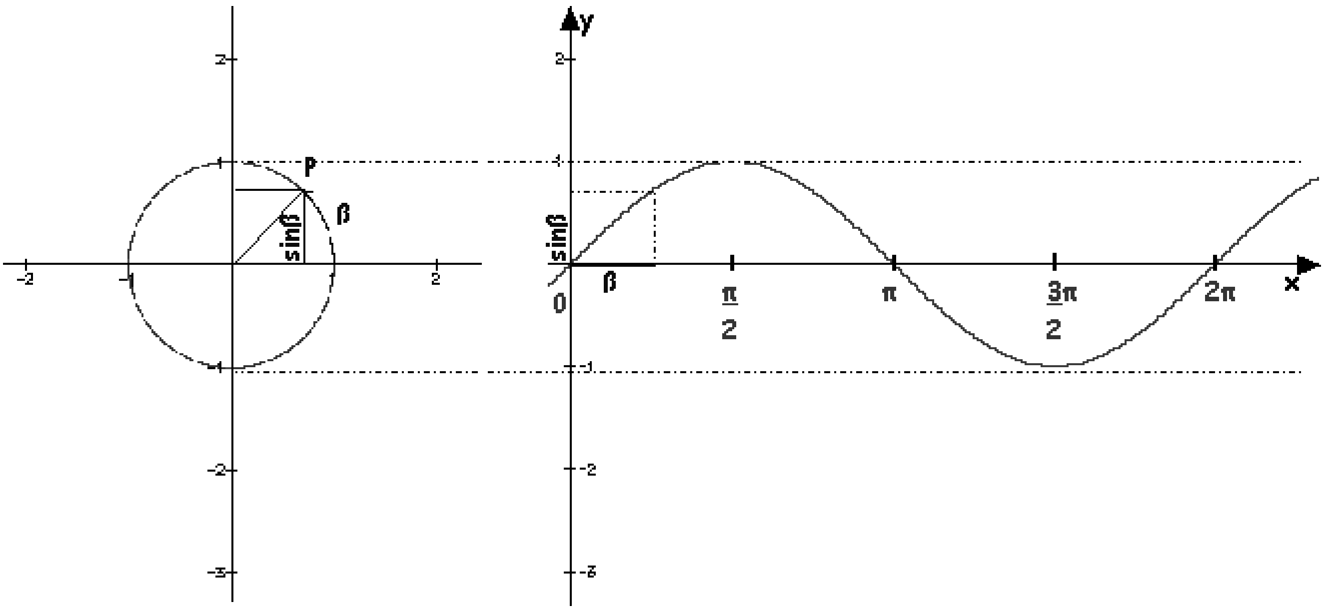
Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 📠: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 📠: (+39)011.802.42.19

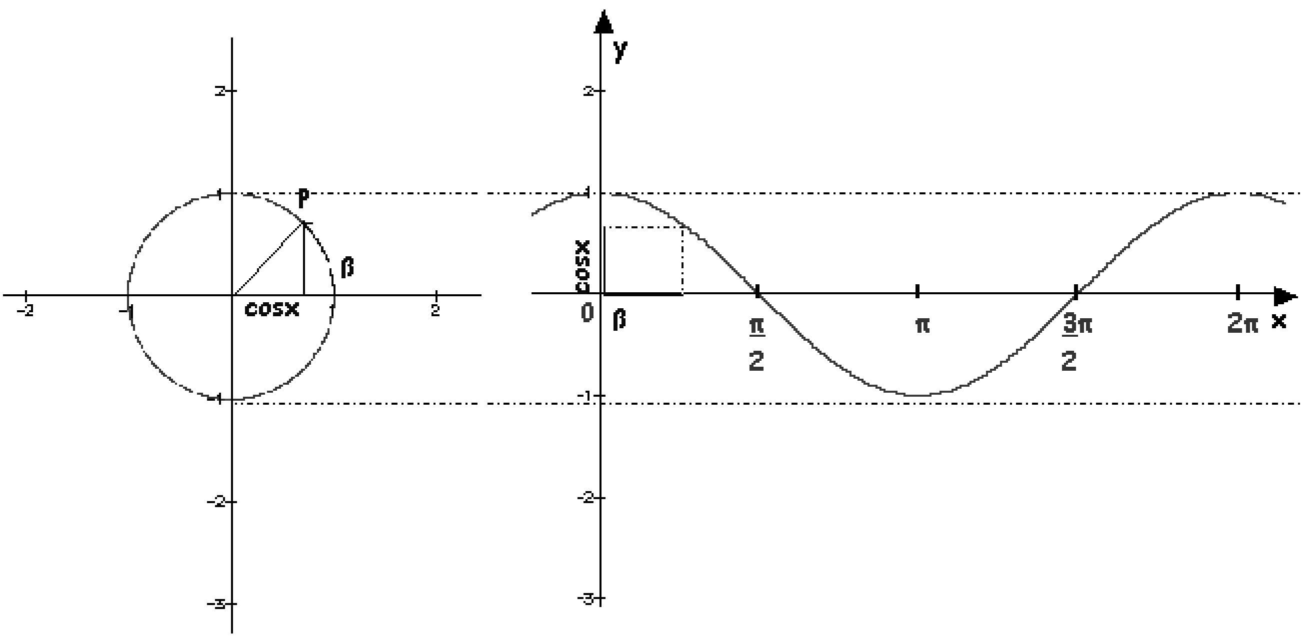
10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

GRAFICI DELLE FUNZIONI

y = sen x
SINUSOIDE



y = cos x
COSINUSOIDE

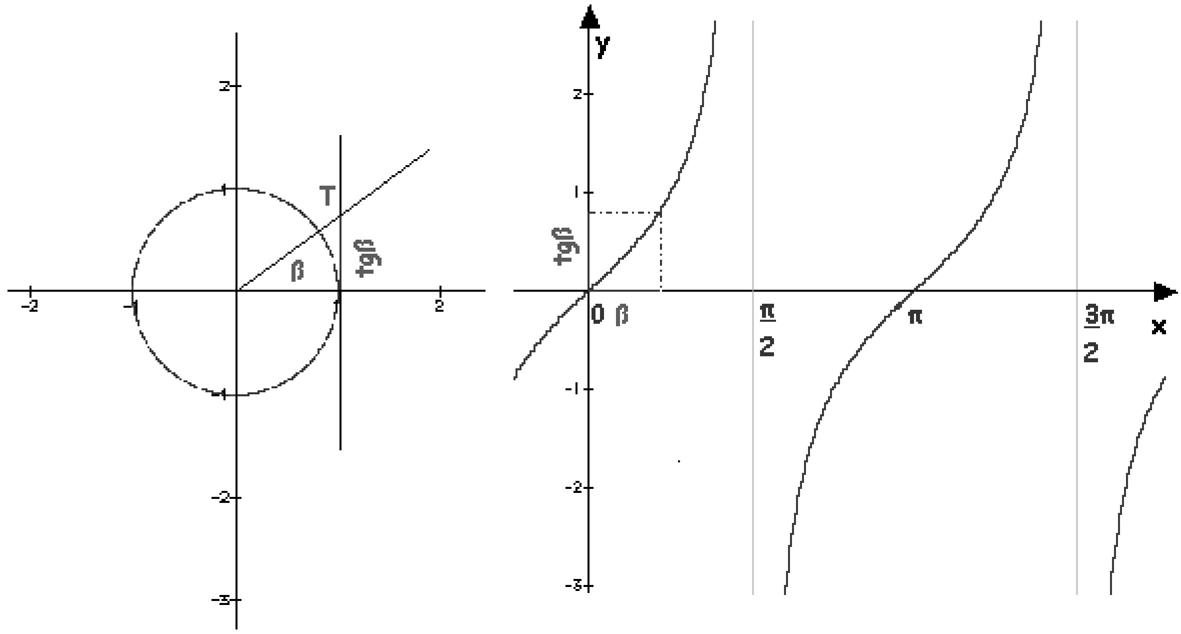


Sezioni Associate:

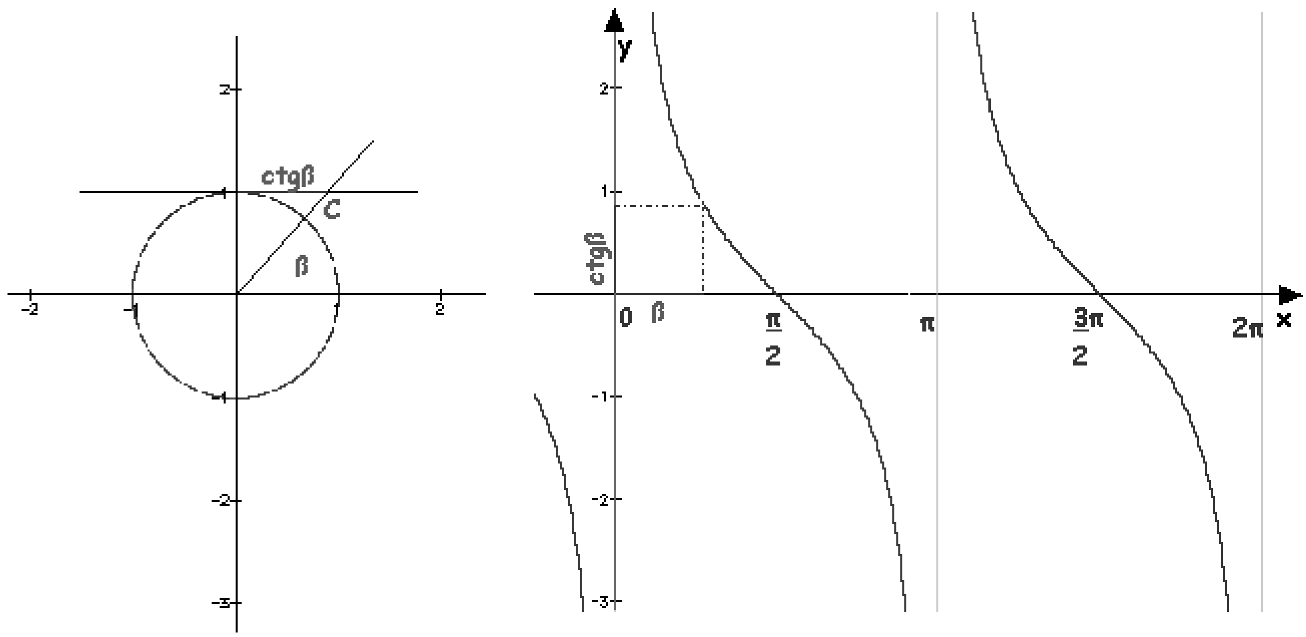
- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

y = tg x
TANGENTOIDE



y = cotg x
COTANGENTOIDE



Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 : (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 : (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

Dallo studio precedente possiamo dire che per quanto riguarda le funzioni **y = sen x e y = cos x**:

- Il dominio è: $\forall x \in R$ (tutti i numeri reali)
- Il condominio è: $\forall y \in R$ tale che $-1 \leq x \leq 1$
- Sono funzioni continue
- Sono funzioni periodiche , il periodo è 360°.

Dallo studio precedente possiamo dire che per quanto riguarda la funzione **y = tg x**:

- Il dominio è: $\forall x \in R - \{ 90° + k180°,\ k \in Z \}$(dove k è una costante e Z è l'insieme dei numeri relativi)
- Il condominio è: $\forall y \in R$
- È una funzione discontinua, infatti non esiste per $x = 90° + k180°$
- È una funzione periodica , il periodo è 180° .

Dallo studio precedente possiamo dire che per quanto riguarda la funzione **y = cotg x**:

- Il dominio è: $\forall x \in R - \{ k180°,\ k \in Z \}$(dove k è una costante e Z è l'insieme dei numeri relativi)
- Il condominio è: $\forall y \in R$
- È una funzione discontinua, infatti non esiste per $x = k180°$
- È una funzione periodica , il periodo è 180° .

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 📠: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Leni 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 📠: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY

INDICE

Sezioni Associate:

- (IPSIA) Professionale per l'Industria e l'Artigianato Via Don Gnocchi 2/A ☎: (+39) 011.800.13.53 🖷: (+39)011.897.63.16
- (IPSCT) Professionale per il Commercio e il Turismo Via Lenì 54 ☎: (+39) 011.897.64.00 🖷: (+39)011.802.42.19

10036 SETTIMO TORINESE (TO) - ITALY